UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

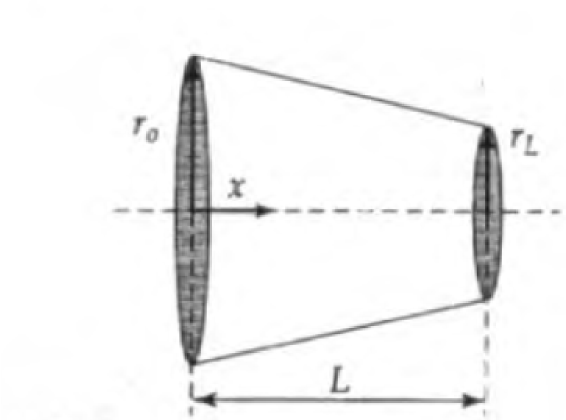
Problemas - Série 1
Cinemática

1. Mostre que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$.

2. Calcule a componente axial (x) da aceleração do fluido para um campo de velocidades dado por:

$$v_x = \frac{V_0}{\left[1 + \frac{r_L - r_0}{r_0}\left(\frac{x}{L}\right)\right]^2}$$

$$v_r = \frac{2V_0 \frac{r_L - r_0}{r_0} r}{L\left[1 + \frac{r_L - r_0}{r_0}\left(\frac{x}{L}\right)\right]^3}$$



3. Dado o campo de velocidades $v_x = u \cos \omega t$ e $v_y = v \sin \omega t$ com $u/\omega = v/\omega = 1$ m. Calcule
   a) As linhas de corrente para $\omega t = 0$, $\pi/2$ e $\pi/4$.
   b) As trajectórias (pathlines)
   c) A trajectória de uma partícula, que em t=0 está no ponto x=0, y=1 m.

4. Considere o escoamento não-estacionário

$$u = u_0, \qquad v = kt, \qquad w = 0,$$

   onde u_0 e k são constantes positivas. Mostre que as linhas de corrente são linhas retas e trace-as em dois instantes de tempo diferentes. Mostre também que um elemento de fluido segue uma trajetória parabólica.

5. Independentemente da compressibilidade, cada elemento de fluido conserva a sua massa durante o escoamento. Considere a taxa de escoamento de massa através de uma superfície fechada S, no interior do fluido, e mostre que a conservação da massa implica

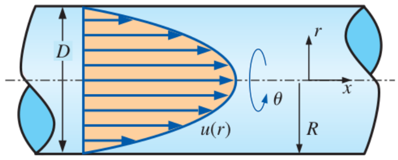
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\rho \mathbf{u}) = 0$$

onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade variável do fluido. Mostre ainda que esta equação pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla.\mathbf{u} = 0$$

Segue-se que se $\nabla.\mathbf{u} = 0$, então $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$. O que significa isso? Faz sentido?

6. Considere um escoamento de Poiseuille axissimétrico totalmente desenvolvido, isto é, um escoamento num tubo cilíndrico de raio R (diâmetro $D = 2R$), sob um gradiente de pressão dP/dx como ilustrado na figura abaixo (dP/dx é constante e negativo). O escoamento é estacionário,



incompressível e axissimétrico relativamente ao eixo dos x. As componentes da velocidade são dadas por

$$u_x = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2 - R^2) \qquad u_r = 0 \qquad u_\theta = 0$$

onde μ é a viscosidade do fluido.
a) Este escoamento é rotacional ou irrotacional? Se for rotacional, calcule a componente da vorticidade na direção θ e discuta o sinal da rotação.
b) Para o escoamento de Poiseuille axissimétrico da alínea a, calcule as taxas de deformação linear nas direções x e r e calcule a taxa de deformação de cisalhamento ε_{xr}. O tensor da taxa de deformação em coordenadas cilíndricas (r, θ, x) e (u_r, u_θ, u_x), é

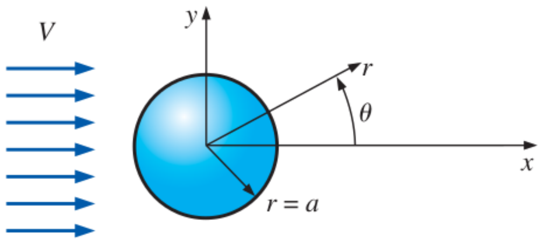
$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta x} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

c) Combine os resultados da alínea b para formar o tensor da taxa de deformação axissimétrico ε_{ij},

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

Os eixos x e r são eixos principais?

7. Existem inúmeras ocasiões em que um escoamento aproximadamente uniforme encontra um cilindro circular longo alinhado perpendicularmente ao escoamento (figura abaixo). Exemplos

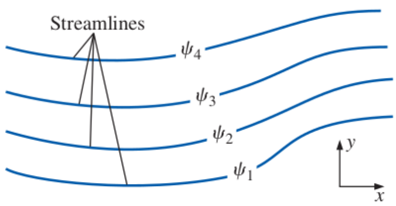


incluem ar em torno de uma antena dum carro, vento contra um mastro de bandeira ou poste de telefone, vento nos fios elétricos e correntes oceânicas que colidem com as vigas redondas submersas que apoiam as plataformas de petróleo. Em todos estes casos, o escoamento na parte traseira do cilindro é instável e geralmente turbulento. No entanto, o escoamento na parte frontal do cilindro é muito mais estável e previsível. Na verdade, exceto numa camada limite muito fina perto da superfície do cilindro, o campo de velocidades pode ser aproximado pelo seguinte escoamento estável e bidimensional no plano xy ou $r\theta$:

$$u_r = V\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -V\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

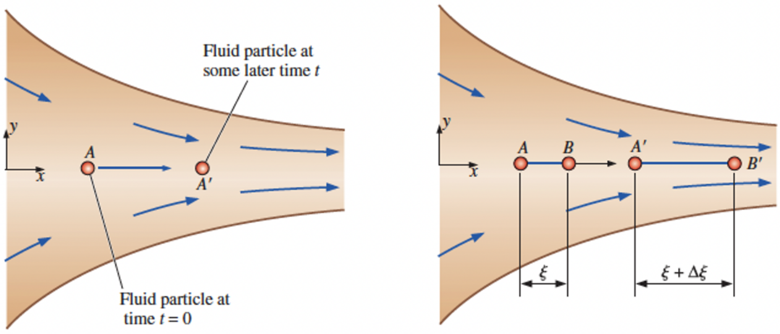
a) Este campo de velocidades é rotacional ou irrotacional? Explique.
b) Considere o campo de velocidades da alínea a. Considere apenas a parte frontal ($x < 0$). Existe um ponto de estagnação nesse domínio. Onde ? Dê sua resposta em coordenadas cilíndricas e cartesianas.
c) Calcule o tensor das taxas de deformação em coordenadas cilíndricas. Discuta as alterações na forma dos elementos de fluido ao longo do escoamento.
d) O escomento é compressível ou incompressível ?

8. Considere a metade a montante ($x < 0$) do campo de velocidades do problema anterior (escoamento sobre um cilindro circular). Introduzimos um parâmetro chamado função de corrente ψ, que é constante ao longo das linhas de corrente em escoamentos bidimensionais como o considerado (ver figura abaixo). O campo de velocidades do problema anterior corresponde a uma função de corrente dada por $\psi = V\sin\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$.
a) Definindo ψ como uma constante, escreva uma equação para uma linha de corrente. (Sugestão: use a regra quadrática para resolver r como função de θ).
b) Para o caso particular em que $V = 1$ m/s e o raio do cilindro $a = 10$ cm, trace algumas linhas de corrente na metade a montante do escoamento ($90° < \theta < 270°$). Por consistência, trace no intervalo $-0.4m < x < 0m$, $-0.2m < y < 0.2m$, com valores da função de corrente espaçados uniformemente entre $-0.16m^2/s$ e $0,16m^2/s$.



9. a) O escoamento num canal convergente é aproximado pelo seguinte campo de velocidade bidimensional estacionario: $\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\hat{\imath} - by\hat{\jmath}$. Este campo de velocidades é rotacional ou irrotacional?
b) Uma partícula de fluido (A) está localizada no eixo dos x em $x = x_A$ no instante $t = 0$ (figura). Num momento posterior t, a partícula de fluido moveu-se a jusante com o escoamento para um novo local $x = x_{A'}$, como ilustrado na figura. Como o escoamento é simétrico em relação ao eixo dos x, a partícula de fluido permanece no eixo dos x durante todo o tempo. Escreva uma expressão analítica para a localização x da partícula de fluido num tempo arbitrário t em termos de sua localização inicial x_A e das constantes U_0 e b. Por outras palavras, escreva uma expressão para $x_{A'}$.
c) Como o escoamento é simétrico em torno do eixo dos x, o segmento de linha AB ao longo do eixo permanece no eixo, mas estende-se do comprimento ξ para o comprimento $\xi + \Delta\xi$ à medida que flui ao longo da linha central do canal (figura). Escreva uma expressão analítica para a mudança no comprimento do segmento de linha, $\Delta\xi$.

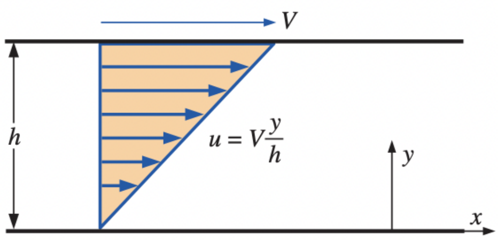
d) Desenvolva uma expressão para a taxa de deformação linear na direção x (ε_{xx}) de partículas de fluido localizadas na linha central do canal. Compare seu resultado com a expressão geral para ε_{xx} em termos do campo de velocidade, ou seja, $\varepsilon_{xx} = \partial u/\partial x$.
e) Uma partícula de fluido (A) está localizada em $x = x_A$ e $y = y_A$ em $t = 0$. Num momento posterior t, a partícula de fluido moveu-se a jusante com o escoamento para um novo local $x = x_{A'}$, $y = y_{A'}$. Escreva uma expressão analítica para a localização y da partícula de fluido num tempo arbitrário t em termos de sua localização y inicial y_A e da constante b e faça um esboço.



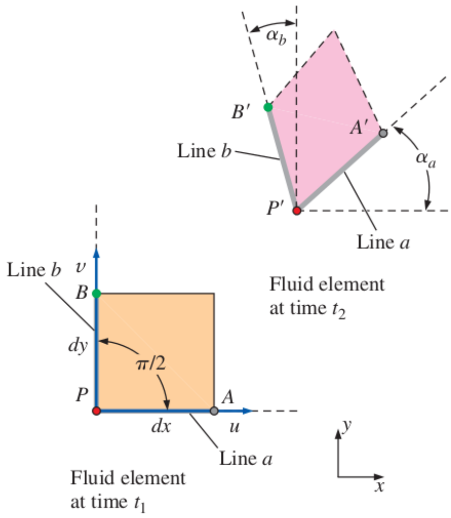
10. a) Considere o escoamento de Couette totalmente desenvolvido - escoamento entre duas placas paralelas infinitas separadas pela distância h, com a placa superior em movimento e a placa inferior estacionária, como ilustrado na figura. O escoamento é estacionario, incompressível e bidimensional no plano xy. O campo de velocidades é dado por

$$\vec{V} = (u, v) = \frac{Vy}{h}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$$

Este escoamento é rotacional ou irrotacional? Se for rotacional, calcule a componente da vorticidade na direção z. As partículas de fluido neste escoamento giram no sentido horário ou anti-horário?
b) Calcule as taxas de deformação linear nas direções x e y e calcule a taxa de deformação de cisalhamento ε_{xy}.
c) Combine os seus resultados para escrever o tensor de taxa de deformação bidimensional ε_{ij}. Os eixos x e y são eixos principais?



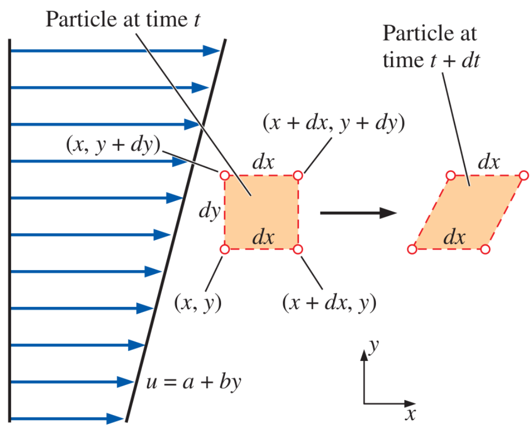
11. Um elemento de fluido bidimensional de dimensões dx e dy translada e distorce como mostrado na figura durante um intervalo de tempo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. As componentes da velocidade no ponto P no momento inicial são u e v nas direções x e y, respectivamente. Mostre que o módulo da taxa de rotação (velocidade angular) em torno do ponto P no plano xy é $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.



12. Considere um escoamento estacionário, incompressível e bidimensional com cisalhamento para o qual o campo de velocidades é

$$\vec{V} = (u, v) = (a + by)\vec{i} + 0\vec{j}$$

onde a e b são constantes. Na figura abaixo está esboçado uma partícula de fluido retangular de dimensões dx e dy no instante t. A partícula de fluido move-se e deforma-se com o escoamento de forma que posteriormente $(t + dt)$, a partícula não tem mais ângulos retos, como ilustrado na figura. A localização inicial de cada canto da partícula de fluido é indicado na figura. O canto inferior esquerdo está em (x, y) no instante t, onde a componente x da velocidade é $u = a + by$. Mais tarde, este canto move-se para $(x + u\,dt, y)$.
a) Calcule a localização de cada um dos outros três cantos da partícula de fluido no instante $t + dt$.
b) Da definição de taxa de deformação linear (a taxa de variação do comprimento por unidade de comprimento), calcule as taxas de deformação linear ε_{xx} e ε_{yy}. Compare com os resultados obtidos a partir da equação para ε_{xx} e ε_{yy} em coordenadas cartesianas.
c) Use dois métodos para verificar se o escoamento é incompressível: (i) pelo o volume da partícula de fluido em ambos os momentos e (ii) pela a taxa de deformação volumétrica.
d) A partir da definição da taxa de rotação (taxa de rotação média de duas linhas inicialmente perpendiculares que se cruzam num ponto), calcule a taxa de rotação da partícula de fluido no plano xy, ω_z. (Sugestão: use a borda inferior e a borda esquerda da partícula de fluido, que se cruzam em 90° no canto inferior esquerdo da partícula no intante inicial). Compare com o resultado obtido a partir da equação para ω_z em coordenadas cartesianas.


Particle at time t
Particle at time $t + dt$
$(x + dx, y + dy)$
$(x, y + dy)$
dx
dy
dx
dx
dx
(x, y)
$(x + dx, y)$
$u = a + by$
y
x